Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 3 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln auch für die ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Sekundarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

581011

Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke mit den folgenden Eigenschaften.

(1) Beide Katheten sind länger als 2.
(2) Verkürzt man beide Katheten um jeweils 2, so vermindert sich der Flächeninhalt um 10.

Die Längen und Flächeninhalte sind dabei in Maßzahlen bzgl. einer geeignet gewählten Längeneinheit und der zugehörigen Flächeninhaltseinheit angegeben.

a) Gibt es unter diesen Dreiecken eines, bei dem die Länge einer der beiden Katheten 4 beträgt?
b) Bestimmen Sie alle Werte, die die Summe der Kathetenlängen unter den genannten Bedingungen annehmen kann.
c) Welche der betrachteten Dreiecke haben zusätzlich die folgende dritte Eigenschaft?
    (3) Verlängert man beide Katheten um jeweils 2, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 14.

581012

Hans würfelt mit vier idealen sechsseitigen Spielwürfeln.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der vier gewürfelten Zahlen eine Primzahl ist.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der vier gewürfelten Zahlen kleiner als 11 ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

581013

Ähnlich wie bei einer Schokoladentafel wird ein Rechteck $ABCD$ mit den positiven ganzzahligen Seitenlängen $|AB| = p$ und $|AD| = q$ durch $p-1$ Parallelen zu $\overline{AD}$ (*Längslinien*) in p Rechtecke der Breite 1 (diese Rechtecke sollen *Rippen* heißen) und diese wiederum durch $q-1$ Parallelen zu $\overline{AB}$ (*Querlinien)* in je q Quadrate der Seitenlänge 1 geteilt. Die Rippen werden von $\overline{AD}$ aus fortlaufend mit $1, 2, \ldots, p$ nummeriert. Das Rechteck wird nun längs der Diagonalen $d = \overline{AC}$ zerschnitten.

a) Es sei $p = 132$ und $q = 15$. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Schnittpunkte von d mit den Querlinien auf einer Längslinie liegt.

b) Sei nun $p = 41$ und $q = 37$. Ermitteln Sie die Nummern aller Rippen, in deren Innerem kein Schnittpunkt der Strecke d mit einer Querlinie liegt.

c) Schließlich sei $q > 1$ und $p = q^2 - 1$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von q die Anzahl der Rippen, in deren Innerem ein Schnittpunkt einer Querlinie mit der Strecke d liegt.

581014

Aus den sechs Ziffern 2, 3, 4, 5, 7 und 9 werden zwei dreistellige Zahlen gebildet, wobei jede Ziffer genau einmal verwendet wird. In dieser Aufgabe wird die Quersumme der Summe der beiden gebildeten Zahlen untersucht.

Beispiel: Es werden die beiden dreistelligen Zahlen 539 und 247 gebildet. Man erhält die Summe $S = 786$. Deren Quersumme ist $Q = 7 + 8 + 6 = 21$.

a) Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den diese Quersumme annehmen kann.

b) Bestimmen Sie alle Summen, die zur kleinstmöglichen Quersumme führen.

581015

Die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei definiert durch

$$a_1 = 0 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4\,a_n + 4} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\,.$$

a) Berechnen Sie die neun Folgenglieder $a_1, a_2, \ldots, a_9$.

b) Versuchen Sie aus den Resultaten des Aufgabenteils a) eine möglichst einfache, explizite Formel für a_n abzuleiten. Formulieren Sie Ihr Resultat als eine Vermutung. Welcher Wert ist für die Zahl a_{2018} zu vermuten?

c) Zeigen Sie, dass Ihre Formel für a_n tatsächlich den beiden Bedingungen $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4\,a_n + 4}$ genügt.

Hinweis: Die Zahlenfolge $3, 5, 9, 17, \ldots$ bzw. $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 17, \ldots$ wird mit dem Bildungsgesetz

$$a_1 = 3 \text{ und } a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

berechnet, also $a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ usw. Man erhält dieselbe Zahlenfolge mit Hilfe der expliziten Vorschrift $a_n = 2^n + 1$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

581016

Gegeben seien zwei Strecken der Länge s in der Ebene, die keinen Punkt gemeinsam haben. Wir betrachten hierzu die folgende Aussage.

> Es gibt einen Endpunkt A der einen Strecke sowie einen Endpunkt B der anderen Strecke derart, dass für die Länge der Strecke $\overline{AB}$ gilt: $|AB| > s$. (1)

Beweisen Sie die Richtigkeit der Aussage (1) für folgende Fälle.

a) Die beiden Strecken liegen auf parallelen Geraden.

b) Die Strecken liegen auf Geraden, die sich in einem Punkt X schneiden, der im Inneren von genau einer der beiden Strecken liegt.

c) Die Strecken liegen auf Geraden, die sich in einem Punkt X schneiden, der außerhalb beider Strecken liegt.